На правах рукописи

Кобелев Яков Леонидович

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОПИСАНИЯ БОЛЬШИХ СИСТЕМ С ФРАКТАЛЬНЫМИ СТРУКТУРАМИ

01.04.07. - физика конденсированного состояния

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Яков

Екатеринбург - 2001.

Работа выполнена в Уральском государственном университете на кафедре физики низких температур.

Научный руководитель - Член-корреспондент РАН, д.ф.-м.н., проф. Е.П.Романов

Официальные оппоненты - д.ф.-м.н., проф. Ю.Л.Климонтович
д.ф.-м.н., проф. Б.Н.Филлипов

Ведущее учреждение - Уральский государственный технический университет

Защита состоится "10" МАЯ 2001 г. в 15.00 часов на заседании диссертационного совета Д212.286.01 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора физико-математических наук в Уральском государственном университете им. А.М.Горького (620083, г. Екатеринбург, К-83, пр.Ленина, 51, комната 248).
С диссертационной работой можно ознакомиться в научной библиотеке Уральского государственного университета им. А.М.Горького.

Автореферат разослан "27" марта 2001. г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник Н.В.Баранов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы: В последние годы теоретическим и экспериментальным исследованиям свойств больших систем, нелинейных и фрактальных характеристик больших систем (физика твердого тела, физика магнитных материалов, плазма, биологические объекты, твердые электролиты, диффузия в нелинейных и фрактальных средах, экономика и т.д.) посвящено большое число работ. Это обусловлено существенным (часто определяющим) влиянием нелинейных возбуждений и фрактальной размерности системы (зависящей от внешних параметров) на поведение многих физических характеристик системы. В связи с этим исследование различных моделей описания физических свойств больших систем для выяснения вклада в их поведение, при различных условиях, нелинейных и фрактальных структур является важной и актуальной задачей современной физики твердого тела и молекулярной физики. Диссертационная работа посвящена исследованию нескольких моделей описания влияния фрактальных характеристик поверхности контакта твердый электролит/электрод на процессы диффузии, недебаевский импеданс, нелинейную диффузию в фрактальных средах, влияния фрактальных структур на кинетику больших систем и, в связи с этим, является актуальной.

Цель и задачи работы: Диссертационная работа посвящена теоретическому описанию некоторых физических явлений происходящих на поверхности контакта твердый электролит/электрод (в частности, скейлинговых процессов, некоторых видов диффузии в фрактальной среде, описанию температурной зависимости ЭПФ в ряде фрактальных теорий), описанию влияния фрактальных структур на поведение больших систем, исследованию автоволновых решений уравнения диффузии с нелинейным коэффициентом диффузии, исследованию возможностей учета влияния фрактальных структур на кинетику больших систем (электронно-ионная плазма, экономические явления как большая открытая статистическая система).

Для достижения поставленной цели было необходимо решить следующие основные задачи:

1. На основе феноменологических моделей недебаевского импеданса в

твердых электролитах, модельного описания поверхностного слоя контакта электролит/образец в рамках представлений фрактальной геометрии о температурной зависимости элемента постоянной фазы проверить применимость разработанных моделей для фрактальных теорий элемента постоянной фазы в ряде известных теорий не содержащих температурной зависимости ЭПФ;

2. Построить модель диффузии ионов к двум поверхностям с разной фрактальной размерностью (ФР);
3. Исследовать существование решений автоволнового типа для диффузии в фрактальной среде с нелинейным коэффициентом диффузии;
4. Найти точное решение кинетического уравнения Климонтовича в фрактальной среде с постоянным коэффициентом диффузии;
5. Разработать модель описания фрактальной размерности как параметра порядка для поверхности твердого тела;
6. Сформулировать метод учета влияния фрактальных структур на поведение больших систем допускающих описание их динамики с помощью кинетических уравнений;
7. Рассмотреть, как пример, учет влияния фрактальных структур на поведение электронно-ионной плазмы в рамках уравнений Власова;
8. Сформулировать уравнения для описания экономических процессов в рамках статистической физики открытых систем и учесть влияние фрактальных структур в уравнениях математической экономики.

Научная новизна:

1. Проведено применение фрактальной теории температурной зависимости ЭПФ для ряда известных моделей ЭПФ не содержащих температурной зависимости ЭПФ;
2. Получено теоретическое описание диффузии ионов к двум фрактальным поверхностям с различной ФР;
3. Найдено автоволновое решение для диффузии в фрактальной среде с нелинейным коэффициентом диффузии
4. Найдено решение кинетического уравнения Климонтовича в фрактальной среде;
5. Разработана модель описания фрактальной размерности поверхности твердого тела как параметра порядка на основе идей работы Гинзбур-

га-Ландау;

6. Разработан метод учета в больших системах, описываемых кинетическими уравнениями, влияния фрактальных структур на поведение системы; получены поправки к спектру элементарных возбуждений электронно-ионной плазмы обусловленные влиянием фрактальных структур;
7. Сформулирован общий метод описания экономических моделей кинетическими уравнениями статистической физики открытых систем.

Практическая ценность работы: Работа выполнена по теме исследований, проводимых на кафедре физики низких температур Уральского государственного университета в Проблемной лаборатории "Физика экстремальных воздействий на вещество" в рамках программы "Интеграция" и исследований проводимых по теме: "Синтез многокомпонентных кристаллов и пленок, теоретическое и экспериментальное исследование твердых тел с целью создания материалов с новыми физическими свойствами", а также в рамках тематики гранта РФФИ № 97-02-16212 " Разработка физических принципов и экспериментальных методов получения твердых электролитов для работы при криогенных температурах", гранта РФФИ "Теоретические и экспериментальные исследования сложных полупроводниковых халькогенидов для синтеза и конструирования на их основе низкотемпературных твердых электролитов, сегнетоэлектриков и составов с большим магнетосопротивлением пригодных для научных и прикладных целей" № 00-02-16585 а также тематики совместной учебно-научной лаборатории ИВЭХ УрО РАН и Уральского университета и НОЦ УрГУ (по тематике "Перспективные материалы").

1. Проведенные теоретические исследования влияния фрактальных структур на температурную зависимость недебаевского импеданса, дают метод практического выбора тех или иных фрактальных структур при объяснении экспериментальных данных полученных при исследовании свойств твердых электролитов.

2. Проведенные теоретические исследования связи фрактальной размерности поверхности твердых тел с параметром порядка способствуют более глубокому пониманию физических процессов происходящих в сложных системах.

3. Разработанная методика учета влияния фрактальных структур на поведение больших систем позволяет учитывать влияние вклада от фрактальных структур при решении ряда важных проблем физики твердого тела и физики плазмы.

<u>На защиту выносятся:</u>

1. Теоретический анализ скейлинговых свойств электрических параметров поверхности электрод/образец;
2. Исследование диффузии к фрактальным поверхностям для случая разных ФР электролита и электрода;
3. Применение фрактальной теории температурной зависимости ЭПФ в ряде известных фрактальных моделей ЭПФ не учитывающих температурную зависимость ЭПФ;
4. Формулирование уравнения и исследование автоколебательного решения уравнения диффузии в фрактальной среде с нелинейным коэффициентом диффузии;
5. Получение и исследование решения кинетического уравнения Климонтовича в фрактальной среде;
6. Предложенная модель описания фрактальной размерности поверхности как параметра порядка;
7. Метод учета влияния фрактальных структур на динамику поведения больших систем допускающих описание с помощью кинетических уравнений;
8. Разработка математического описания поведения экономических систем (включая фрактальные) методами статистической физики открытых систем.

<u>Апробация работы:</u>

Материалы диссертации докладывались и представлялись на семинарах КФНТ УрГУ, института электрохимии УрО РАН, на Всероссийских и Международных конференциях: "Проблемы фундаментальной физики", 7-12 октября 1996 г., Саратов; 9th International Meeting on Ferroelectricity, 24-29 August, 1997, Seoul, Korea; Joint International Meeting of ECS and ISE, 31Aug.-5 Sept. 1997, Paris, France; "Физика конденсированного состояния", Стерлитамак, 22-25 сентября 1997 г.; 11th International Conference on Solid State Ionics, Honolulu, USA, 16-21Nov 1997; 8 Международной конференции по физике полупроводников при высоких давлениях, 8^{th} HPSP, Салоники, 1998; "Оксиды. Физико-химические свойства и технология", Екатеринбург, 27-31 января,1998; январь 2000; "Фазовые переходы и критические явления в конденсированных средах", Махачкала, 7-11 сентября, 1998г; "Фазовые переходы и нелинейные явления в конденсированных средах" Махачкала, 6-9 сентября 2000.

Результаты исследований, включенные в диссертацию, изложены в 23 публикациях, список которых приводится в конце автореферата.

<u>**Структура и объем диссертации:**</u> Диссертационная работа состоит из введения, 5 глав, заключения, списка цитированной литературы, содержит 156 страниц текста, включает 11 рисунков. Список цитированной литературы содержит 129 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

<u>**Во введении**</u> обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цель и задачи диссертационной работы, перечислены положения выносимые на защиту; отмечена научная новизна полученных результатов и их практическая ценность.

<u>**Глава 1**</u> содержит сведения о дробных производных Римана-Лиувилля [1]-[2], а также обобщенных дробных производных с показателем дробности зависящим от координат и времени [3] и является обзорной (остальные главы содержат результаты оригинальных исследований). Математический аппарат дробных производных в последнее время широко используется в различных разделах физики (физики твердого тела, физики плазмы, квантовой теории поля и т.д.) и необходим как для описания стохастических процессов, так и для описания процессов в системах не марковского типа (в частности, в системах с частичным сохранением памяти или с фрактальными структурами).

<u>**В главе 2**</u> приведены результаты исследования скейлинговых свойств твердых электролитов и влияния фрактальных характеристик поверхности твердых электролитов на их электрические свойства в рамках различных фрактальных теорий, рассмотрены результаты теоретических исследований некоторых статистических процессов (включая броуновское движение) с учетом влияния на них частичного сохранения памяти.

Рассмотрена диффузия ионов к поверхностям контакта электролита и электрода для случая разных фрактальных размерностей этих поверхностей. В этом случае, вводя для описания диффузии к поверхностям образца и электрода различные фрактальные размерности (d и γ - фрактальные характеристики в плоскости поверхности контакта образца и направлении диффузии ионов, ε и δ - аналогичные фрактальные характеристики для поверхности электрода) и описывая диффузию ионов уравнениями диффузии с дробными производными содержащими фрактальные характеристики (дробные производные соответствуют производным Римана-Лиувилля) ($\frac{\partial^d n}{\partial t^d} = D\frac{\partial^{2\gamma} n}{\partial x^{2\gamma}}$ и $\frac{\partial^\varepsilon n}{\partial t^\varepsilon} = D'\frac{\partial^{2\delta} n}{\partial x^{2\delta}}$, соответственно), для временной зависимости тока найдена (исходя из анализа скейлинговых свойств) зависимость от фрактальных характеристик имеющая вид

$$j \sim t^{-\alpha}, \qquad \alpha = \frac{\varepsilon d(1 + 2\varepsilon + 2\gamma - 4d - \delta)}{2(2\gamma\varepsilon - \varepsilon d - \delta d)}$$

Эта зависимость учитывает различную фрактальную структуру поверхностей контакта электролита и электрода и в частном случае одной фрактальной поверхности сводится к зависимостям, найденным ранее другими авторами. В § 2-5 основные идеи фрактальной теории температурной зависимости элемента постоянной фазы (недебаевской частотной зависимости импеданса обусловленной наличием неоднородностей на поверхностях кристаллитов и поверхности границы образец/электрод) [4] использованы для распространения ее на ряд наиболее известных фрактальных теорий элемента постоянной фазы (ЭПФ) созданных другими авторами не учитывающих температурную зависимость ЭПФ. Существует свыше 20 теорий этого явления основанных на фрактальных представлениях о поверхности твердого тела, однако, ни одна из них не объясняет температурную зависимость ЭПФ.

Многочисленные экспериментальные данные свидетельствуют о том, что температурные зависимости ЭПФ для разных электролитов отличаются большим разнообразием (рис.1).

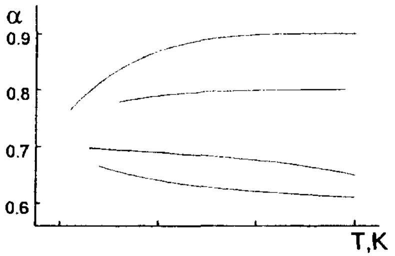

Рис.1. Типичные экспериментальные температурные зависимости показателя степени элемента постоянной фазы.

В § 3 приведены основные результаты теории [4], описывающие влияние фрактальных характеристик поверхности твердых электролитов на температурную зависимость элемента постоянной фазы, учитывающей следующие предположения:

а) Граница контакта каждого кристаллического зерна с другим зерном (или поверхностью электрода) описывается фрактальной размерностью d_i и показателем степени ЭПФ α_i (i-номер кристаллита), зависящим от d_i; (конкретизация зависимости α_i от d_i определяется используемой фрактальной теорией ЭПФ);

б) Для границы каждого кристаллита фрактальная размерность имеет свое значение;

в) Распределение фрактальных размерностей по разным зернам-кристаллитам (или участкам границы электрод/образец) определяется функцией распределения $n(d_i)$ (в простейшем случае $n(d_i)$ - Гауссовское распределение);

г) Граница раздела поверхностей двух кристаллитов (двойной слой) может быть охарактеризована набором эффективных конденсаторов C_j и эффективных сопротивлений R_j, которые, так же как адмиттанс Y_i через эту границу, зависят как от фрактальной размерности этого кристаллита, так и от физико-химических особенностей, сильно отличающихся для разных твердых электролитов, различных технологических методов их получения и т.д.

В этом случае адмиттанс образца можно найти усреднением адмиттансов отдельных кристаллитов по их фрактальной размерности:

$$Y \equiv Y_{cp} = \int Y(d)n(d)dd, \quad Y_{cp} = (i\omega)^{\alpha_{cp}}, \quad \alpha_{cp} = \int \alpha(d)n(d)dd$$

$$n(d) = A(\beta)\exp\left(-\frac{d^2}{2\beta^2}\right), \qquad \int_0^{d_0} n(d)dd = 1$$

Среднее значение показателя степени ЭПФ α_{cp} имеет вид

$$\alpha_{cp} = A(\beta)\int_0^{d_0} \alpha(d)\exp\left(-\frac{\alpha(d)^2}{2\beta^2}\right)dd$$

где d_0 -максимальное значение фрактальной размерности контакта образец/электрод и определяется выбором модели контакта. Зависимость $\beta(T)$ от физических параметров, согласно [4], имеет вид $\beta(T) = \dfrac{D(T)C(T)}{\sigma(T)S_{cp}}$,

где D- коэффициент диффузии, C -емкость электролита, σ- ионная проводимость, S_{cp} - средняя площадь поверхности кристаллитов (или контактов между зернами). Вышеприведенные формулы используются в следующих параграфах для описания температурной зависимости ЭПФ в рамках других фрактальных теорий. В § 4-5 исследована температурная зависимость ЭПФ для различных фрактальных моделей поверхности контакта электролит/образец, разработанных Никоши и Пайкоши, Лиу, Ле Мео и Крепи, Халсеем, Боллом и Блантом, и не описывающих температурную зависимость ЭПФ. В простейшем случае связи $\alpha = d$, среднее значение показателя степени ЭПФ равно

$$\alpha_{cp}(T) = \frac{\beta\left(1-\exp\left(-\dfrac{\alpha_0^2}{2\beta^2}\right)\right)}{\Phi\left(\dfrac{\alpha_0}{\beta(T)}\right)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

где $\Phi(\dfrac{\alpha_0}{\beta})$ - интеграл вероятности $\Phi(X) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int_0^X \exp(-\dfrac{y^2}{2})dy$. Для других

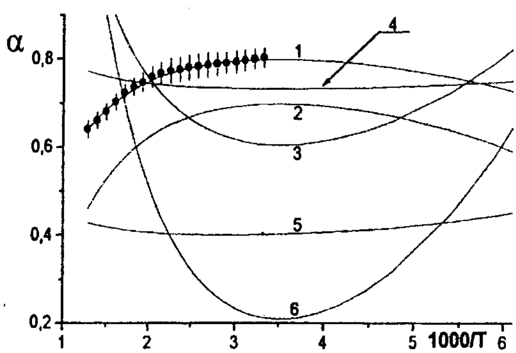

Рис. 2. Температурная зависимость показателя степени ЭПФ α для фрактальных теорий: $\alpha = d$ (1), $\alpha = \dfrac{d-1}{2}$ (2), $\alpha = \dfrac{1}{d-1}$ (3), $\alpha = \dfrac{1}{d}$ (4), $\alpha = 3-d$ (5), $\alpha = 5-2d$ (6) для значений β_0=937K, E_a=0,024eV, соответствующих эксперименту [5]; точками обозначены экспериментальные данные [5].

фрактальных теорий ЭПФ при выборе ЭПФ поверхности отдельных электролитов в виде $\alpha = \frac{d-1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{d-1}$,$\alpha = \frac{1}{d}$, $\alpha = 3 - d$, $\alpha = 5 - 2d$ графические зависимости температурной зависимости ЭПФ рассчитанные при выборе параметра β из экспериментальных данных для электролита β-Al_2O_3 легированного Li [5] приведены на рис.2.

При сравнении теоретических выводов с экспериментальными температурными зависимостями ЭПФ [5] к лучшему совпадению с экспериментом для электролита β-Al_2O_3 приводит модель $\alpha = d$. Полученные теоретические зависимости температурной зависимости ЭПФ позволяют выбирать модели поверхности контакта электролит/образец наилучшие для описания экспериментальных результатов.

В §6 рассмотрены автоволновые процессы при нелинейной фрактальной диффузии. В нелинейных средах коэффициент диффузии является нелинейной функцией концентрации частиц и в таких средах могут существовать автоволновые процессы. Рассмотрено уравнение диффузии с нелинейным коэффициентом диффузии в фрактальной среде, характеризуемой как дробной размерностью времени, так и дробной размерностью координат. Уравнение диффузии в фрактальной среде с нелинейным коэффициентом диффузии, пропорциональным степени концентрации частиц, учитывает процессы с сохранением временной и пространственной "памяти" и имеет вид

$$\frac{\partial^{\nu}}{\partial t^{\nu}} n(x,t) = \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}} [D(n(x,t)^{\sigma}) \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}} n(x,t)]$$

$$\nu \geq 0, \quad \gamma \geq 0, \qquad n(0,x) = 0, \quad x > 0, \quad n(t,0) = n_0 t^{p}$$

где $\frac{\partial^{\nu}}{\partial t^{\nu}}$ и $\frac{\partial^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}}$ - дробные производные Римана-Лиувилля порядка ν и γ [1]. Для описания автоколебательных процессов, характеризуемых уравнением диффузии с дробными производными и нелинейным коэффициентом диффузии получено решение

$$n(x,t) = n_0 V^{-(2\gamma-\nu)\sigma^{-1}} (Vt - x)^{(2\gamma-\nu)\sigma^{-1}}, \quad n_0 = (\frac{V^{1+2\gamma-\nu}}{bD_0})^{\sigma^{-1}}$$

$$b = \frac{\Gamma(1+\sigma^{-1} - \nu + \gamma)}{\Gamma(1+\sigma^{-1} - \gamma)}, \quad V = [bn_0^{\sigma} D_0]^{\frac{1}{1+2\gamma-\nu}}, \quad p = (2\gamma - \nu)\sigma^{-1}$$

При $\gamma = \nu = 1$, $\sigma \neq 0$ это решение совпадает с известным решением уравнения с обычными производными.

Найдено также решение уравнения с добавочным слагаемым в правой части

$$\frac{\partial^{\nu}}{\partial \eta} n = \frac{\partial^{\gamma}}{\partial \eta^{\gamma}} [D_0 n^{\sigma} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial \eta^{\gamma}} n] + \beta_0 n^{\beta},$$

где β_0=const. и β-дробная величина. Таким образом, в фрактальной среде на диффузионный поток, обусловленный существованием градиентов плотности, накладывается волновое движение, нелинейная диффузия становится более сложной, максимальный ток диффузии (найденный для линейной диффузии в фрактальной среде) модулируется автоволновыми процессами.

В § 7 рассмотрены модели диффузии в фрактальных средах. В частности исследовано одномерное уравнение Климонтовича [6] с дробными производными по времени t, координатам x и импульсам p, соответствующее описанию процессов протекающих в неупорядоченных средах, в гелях, пространствах аэрозолей и т.д., т.е. в средах, где процессы релаксации и диффузии не являются дебаевскими (при добавлении слагаемого релаксационного типа и коэффициентах диффузии не зависящих от x,p,t)

$$\frac{\partial^{\nu}}{\partial t^{\nu}} f(x,p,t) = D^{x} \frac{\partial^{2\gamma}}{\partial x^{2\gamma}} f(x,p,t) + D^{p} \frac{\partial^{2\xi}}{\partial p^{2\xi}} f(r,p,t) - \tau^{-1} f(x,p,t)$$

где τ- время релаксации, γ, ν, ξ дробные величины, удовлетворяющие условиям $\gamma \leq 1$, $0 \leq \nu \leq 1$, $\xi \leq 1$, f(x,p,t)-функция распределения, D^{x} и D^{p} –коэффициенты диффузии в координатном и импульсном пространствах, соответственно. Найдено точное решение этого уравнения, с помощью функций Фокса, и проведен анализ асимптотики решения при больших временах.

В §8 рассмотрено броуновское движение в системах с дробной размерностью. В системе, состоящей из большого числа объектов, хаотичное движение которых частично упорядочено (неполный хаос), вероятность f(x,t) найти частицу в точке с координатами x,t (x=x,y,z) определяется уравнением (ν_i (i=x,y,z,t) - ФР системы)

$$f(x,t) = I^{\nu}_{x',t'}\widetilde{p}(x,t,x',t')f(x',t')dx'dt'$$

где $\widetilde{p}$(x,t;x',t') - вероятность перехода из точки x',t' в точку x,t , $I^{\nu}_{x,t} = I^{\nu_1}_x I^{\nu_2}_y I^{\nu_3}_z I^{\nu}_t$ -четырехкратный дробный интеграл Римана-Лиувилля ($2I^{\nu_i}_i = I^{\nu_i}_{+,i} + I^{\nu_i}_{-,i}$) и $I^{\nu_i}_{\pm,i}$ заданы на бесконечных осях [1]. Из уравнения для f(x,t) следует уравнение для $\widetilde{p}$(x,t;x',t'):

$$\widetilde{p}(x,t,x_0,t_0) = I^{\nu}_{x',t'}\widetilde{p}(x,t,x',t')\,\widetilde{p}(x',t',x,t)\,dx'dt'$$

отличающееся от уравнения Смолуховского лишь наличием интеграции по времени t' и заменой целочисленных интегралов на дробные. Для таких систем, получены также аналоги уравнения Фоккера-Планка и управляющего уравнения. В этих уравнениях присутствуют новые слагаемые с временными и пространственными дробными производными. В случае пренебрежения фрактальными поправками и переходе к обычным средам в уравнениях сохраняются слагаемые с временными производными второго порядка.

В главе 3 рассмотрен вариант теории описания фрактальных свойств поверхности кристаллитов, в котором фрактальная размерность поверхности описывается как параметр порядка.

Получены уравнения, определяющие фрактальную размерность поверхности в различных приближениях на основе использования теории Гинзбурга-Ландау [7]. Как известно, описание многих свойств твердых тел, включая свойства их поверхностей, с помощью экспериментальных и теоретических исследований фрактальной размерности (ФР) поверхности кристаллитов, основано на подтверждаемом экспериментом допущении о распределении поверхностных кластеров, состоящих, в основном, из атомов поверхности кристаллитов, по законам фрактальной геометрии [8]. Многие физические свойства множества атомных кластеров, распределенных на поверхности поликристалла, и по поверхностям кристаллитов внутри поликристалла, могут быть описаны, в достаточно хорошем приближении, как свойства фрактальных множеств (которые они и представляют). Последнее десятилетие понятие фрактальной размерности множеств усилиями большого числа физиков и материаловедов [8] превратилось в новую физическую характеристику твердых тел, содержащую информацию об их прочности, хрупкости, механизмах образования трещин, шероховатости поверхности, зависящую от других физических характеристик (температуры, давления, времени и условий роста кристаллитов и т. д.) и широко используется при описании физических свойств в физике твердого тела, в материаловедении и других областях физики. Тем не менее, при теоретическом описании зависимости тех или иных физических явлений от фрактальной размерности в большинство известных нам работ ФР входит как параметр, подлежащий экспериментальному определению. В этой главе построена феноменологическая теория зависимости ФР поверхности кристаллитов от физических величин, таких как температура, время роста, давления и т.д. При этом фрактальная размерность поверхности рассматривается, по аналогии с работами [9-10] (в которой фрактальная размерность рассматривалась как параметр порядка, возникающий в фрактальном множестве временных точек или пространственных точек), как новый параметр порядка, возникающий в процессе самоорганизации кластеров атомов поверхности при изменении внутренних или внешних параметров кристаллита. Рассмотрение ФР как параметра порядка позволяет получить достаточно полное описание зависимости ФР поверхности кристаллита в феноменологических теориях от любых физических параметров. Приведем основное уравнение для определения ФР $d(r,t)$, полученное из принципа минимума функционала ФР (параметры P_i: P - давление, T-температура, t- время (или время роста поверхности), S_0-средняя площадь поверхности кристаллитов и т.д.). и уравнение, определяющие граничные условия (для граничных значений P_i):

$$\frac{\partial d}{\partial S_i}=\frac{\partial}{\partial P_i}[A(P_i)\frac{\partial d}{\partial P_i}]+(\varphi-\varphi_0)d+k_1d^2+k(P_i,S_i)$$

$$\frac{\partial}{\partial P_i}[d+\alpha(P_i,S_i)]\Big|_{P_{0i}}^{P_i}=0$$

Выбор оставляемых при разложении функционала ФР в ряд слагаемых определяется физическими условиями рассматриваемой задачи. При пренебрежении релаксационным слагаемым, а также слагаемым с k и при малых величинах $(\varphi-\varphi_0)$ и нелинейных слагаемых, уравнение для ФР превращается в уравнение диффузии в пространстве (S_i,P_i). Частные случаи этих уравнений, исходя из других соображений, были получены в работах [9-10] для теоретического описания зависимости ФР растущего кристаллита от времени роста или зависимости ФР от ударного давления. При этом за S_i принимались изменение средней площади растущего кристаллита за единицу времени или средняя площадь, а за P_i время или давление. При учете памяти системы уравнение для ФР может быть записано в дробных производных Римана-Лиувилля. Рассмотрены частные случаи уравнения включая случай возникновения в плазме фрактальных структур. Показано что в этом случае $\varphi-\varphi_0$ имеет вид (n_e, n_i -плотности функций распределения электронов и ионов)

$$\varphi-\varphi_0\sim\int[(V_e(r-r_1)n_e(r_1,t)-(V_i(r-r_1)n_i(r_1,t)]dr_1$$

Функции $n_e(r,t)$ и $n_i(r,t)$ определяются выбором соответствующих моделей физики твердого тела в приближениях определяемых этими моделями (квантово-механической, статистической и т.д.) выбранными для описания конкретных физических свойств поверхности кристаллита или, в других моделях, уравнениями кинетической теории открытых систем (см., например, [6]). Описание возникновения фрактальной размерности поверхности кристаллитов как фазового перехода, приводящего к появлению нового параметра порядка (ФР), определяемого распределением кластеров атомов по поверхности кристаллита, позволяет, для описания динамики изменения фрактальной размерности как функции физических характеристик кристаллита (внешних и внутренних), использовать хорошо разработанный математический аппарат теории параметров порядка Гинзбурга-Ландау. Частным случаем такого рассмотрения является метод термодинамических потоков, использованный ранее в работах [9-10]. Фрактальность размерности поверхностей, учитывающая временную и пространственную память системы, описывается в использованной методике заменой целочисленных производных на обобщенные дробные производные [3].

В главе 4 предложен метод описания статистических систем содержащих фрактальные структуры (в том числе и динамические) с помощью согласованной системы кинетических уравнений и уравнений, определяющих ФР структур, являющуюся функцией координат и времени. В качестве примера рассмотрена классическая электронно-ионная плазма и найдены поправки к частоте продольных плазменных колебаний. При выводе кинетических уравнений (КУ) для больших систем с фрактальными структурами использованы уравнения для ФР полученные в предыдущей главы и математический аппарат обобщенных дробных производных (ОДП) Римана-Лиувилля ($D_{+,t}^{d(r,t)}$ и $D_{-,t}^{d(r,t)}$) [3], позволяющий рассматривать поведение функций, заданных на мультифрактальных множествах. Предложенный в этой главе метод учета фрактальных структур (ФС) в системах, описываемых КУ, приводит к добавочным уравнениям, определяющим зависимость ФР системы от функций распределения объектов системы. К уравнениям для функций распределения, записанным с помощью ОДП и содержащим ФР, добавляются уравнения для определения самих ФР, зависящих от функций распределения. Возникшая согласованная система уравнений, содержащая ОДП, даже при малой величине фрактальных добавок к целочисленным размерностям, является более сложной, чем первоначальная система КУ (в которую она переходит при обращении дробных добавок к ФР в нуль). Появление новых нелинейных слагаемых в уравнениях системы может привести к появлению новых особых точек типа бифуркаций, фазовых переходов и т.д. и позволяет надеяться, при учете внешних полей, получить более удобные методы управления поведением сложных больших статистических систем. После анализа причин возникновения (ФС) в больших системах получены как кинетические уравнения общего вида с ФС, так и кинетические уравнения для Кулоновской плазмы с ФС в приближении Власова [11-12]. В последнем случае уравнения имеют вид (уравнения Власова с диссипативными интегралами столкновений Климонтовича, (заменены обозначения для ФР $d_a(r,t)$ на $1+d_a(r,t)$, $D_{+,t}^{1+d_t}$ -ОДП)

$$D_{+,t}^{1+d_a(r,t)} f_a + v\frac{\partial f_a}{\partial r} + e_a E(r,t)\frac{\partial f_a}{\partial p} = I_a^{(v)}(r,p,t) + I_a^{(r)}(r,p,t)$$

$$\frac{\partial d_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial P_i}[D_0(r,t)\frac{\partial d_a}{\partial P_i}] + (\varphi_a - \varphi_{a0})d_a + k_1 d_a^2$$

где $a=e,i$ соответствуют электронной и ионной компонентам плазмы, e_a, m_a-массы частиц, N_a полное число частиц сорта a, $n_a = \frac{N_a}{V} = \int f(r,p,t)drdp$, V-объем системы, $\sum_a e_a N_a=0$, f_a -функции распределения, $I_a^{(v)}$ - диссипация Ландау, $I_a^{(r)}$ - интеграл столкновений Климонтовича, описывающий пространственную диффузию, уравнения для Е имеют вид: $\nabla\times E=0$, $\nabla E=4\pi\sum e_a n_a \int f_a(r,p,t)dp$. Для упрощения в уравнениях ОДП сохранены лишь для учета ФС с временной памятью. Приведенные уравнения исследованы для случая когда дробная часть ФР мала по сравнению с единицей ($d_a(r,t) \ll 1$) и найдены поправки к частоте плазменных колебаний обусловленные наличием ФС.

Глава 5 посвящена применению идей и методов статистической физики открытых систем для описания задач математической экономики [13-15]. С этой целью введено два функциональных пространства: пространство экономических аргументов, элементами которого являются понятия используемые в экономике, и пространство функций, элементами которого являются более сложные экономические понятия, описывающие закономерности существующие в экономике и зависящие от аргументов экономического пространства. Для описания временной зависимости функций и их аргументов, заданных на введенных пространствах, используются уравнения реакционно-диффузионного типа статистической физики открытых систем. Для тех случаев, когда размерность введенных пространств является фрактальной, приведены варианты реакционно-диффузионных уравнений записанные с помощью дробных производных Римана-Лиувилля в фрактальных пространствах экономических переменных. Так для случая экономических закономерностей с фрактальными характеристиками (учет частичной памяти о прошлых событиях) получены уравнения (индекс ν_γ (γ=t,x_i и т.д.) характеризует фрактальные свойства экономической среды):

$$D^{\nu_t}_{+,t}F_\alpha(x_i,t)=\varphi_\alpha(F)+D^{\nu_x}_{+,x_i}[D^\alpha_{ij}(F)D^{\nu_x}_{+,x_i}F_\alpha-A_i(x,t)F_\alpha]+$$
$$+D^{\nu_{\dot{x}}}_{+,\dot{x}_i}[\widetilde{D}^\alpha_{ij}(F)D^{\nu_{\dot{x}}}_{+,\dot{x}_i}F_\alpha+(a_i-b_i(x,t)F_\alpha]$$

α=1...β; i=1...N; j=1...N , β-число функций F_α, используемых в исследуемой задаче, $D^{\nu_t}_{+,t}$ - полная дробная производная . Полная производная по времени в левой части уравнения имеет вид (по одинаковым индексам производится суммирование)

$$D^{\nu_t}_{+,t}F_\alpha=D^{\nu_t}_{+,t}F_\alpha+D^{\nu_{x\beta}}_{+,x_\beta}F_\alpha\cdot D^{\nu_t}_{+,t}x_\beta+D^{\nu_{\dot{x}\beta}}_{+,\dot{x}_\beta}F_\alpha\cdot D^{\nu_t}_{+,t}\dot{x}_\beta$$

где $D^\alpha_{ij}(F_1..F_\beta)$, $\widetilde{D}^\alpha_{ij}(F_1..F_\beta)$ -коэффициенты диффузии в пространстве x_i и $\dot{x}_i$, зависящие (в том числе и нелинейно) от F; φ(F,t}- функция, нелинейно зависящая от F, определяемая из данных конкретной экономической задачи (также как и зависимости остальных экономических параметров), $\dot{x}_\beta$ и $\ddot{x}_\beta$ характеризуют скорость и ускорение изменения экономического элемента x_β со временем (при этом $\dot{x}_i$ и $\ddot{x}_i$ могут определяться уравнениями $D^{\nu_t}_{+,t}\dot{x}=\widetilde{\varphi}_1(F_\alpha,B(x_i,x_j)),D^{\nu_t}_{+,t}\ddot{x}=\widetilde{\varphi}_2(F_\alpha,A(x_i,x_j))$, где B и A "внешние" воздействия на экономическую систему. В частных случаях l_α=0 для некоторых или всех α (пренебрежение влиянием факторов, препятствующих изменению dF_α/dt при изменении $\dot{x}$ со временем). Выше приведены уравнения, описывающие временную зависимость экономических параметров (рассматриваемых в качестве переменных или функций) открытой неравновесной статистической системы, включающие описание кризисных и автоколебательных явлений в экономике. Однако, поскольку переменные x_i сами могут зависеть от других переменных x_j (еще раз подчеркнем, что в экономике, из-за зависимости практически всех факторов друг от друга, выбор переменных x_i и функций $F_\alpha(x_i,...)$ достаточно произволен и может изменяться в разных конкретных задачах), к приведенным уравнениям. следует добавить систему уравнений, описывающих зависимость x_i от x_j и F_α. Эти уравнения могут быть выбраны исходя из тех же идей, что и временные уравнения (т.е. заменой $\frac{\partial}{\partial t}$ на $\frac{\partial}{\partial x_i}$ или $\frac{\partial}{\partial F_\alpha}$), т.е. принадлежать к классу реакционно-диффузионных (а также статистических или Ланжевена) уравнений. Поэтому можно записать

$$D_{+,x_j}^{\nu_{x_j}} x_i = F_{ij}(x_j, F_\alpha) + D_{+,x_j}^{\nu_{x_j}} [D_{j\beta}^{x}(x_j) D_{+,x_\beta}^{\nu_{x_\beta}} \cdot x_i - A_j x_i] +$$

$$+ D_{+,\dot{F}_\alpha}^{\nu_{\dot{F}_\alpha}} [\widetilde{D}_{\gamma\beta}(\dot{x}) D_{+,\dot{F}_\beta}^{\nu_{\dot{F}_\beta}} x_i + (\widetilde{a}_i - \widetilde{b}_i(x,t) x_\alpha)]$$

$$D_{+,F_\alpha}^{\nu_{F_\alpha}} x_i = \widetilde{F}_{i\alpha} + D_{+,F_\gamma}^{\nu_{F_\gamma}} [(D_{\gamma\beta}(x_j) D_{+,F_\beta}^{\nu_{F_\beta}} x_i - A_i x_\alpha)] +$$

$$+ D_{+,x_j}^{\nu_{x_j}} [\widetilde{D}_{j\beta}^{\dot{x}}(\dot{x}) D_{+,x_\beta}^{\nu_{\dot{x}_\beta}} x_i + (\widetilde{a}_j - \widetilde{b}_j(x,t) x_i)]$$

С помощью полученной системы уравнений может быть проведено достаточно полное описание поведения экономической системы вблизи точек бифуркации и фазовых переходов. В качестве примера рассмотрена задача (в не фрактальном случае) о временной зависимости курса национальной валюты от национального дивиденда, величины инвестиций, разности между спросом и предложением. Показано наличие в частных случаях периодической временной зависимости курса национальной валюты. Рассмотренные в этой главе уравнения являются примером плодотворности использования в математической экономике уравнений статистической физики открытых систем частным случаем которых являются многие уравнения используемые в математической экономике другими авторами.

Заключение

Систематический анализ некоторых вопросов описания влияния фрактальных структур в больших системах (твердых электролитах, твердых телах, плазме, экономических системах) на их поведение позволил сделать следующие выводы:

1. Разработанная фрактальная модель температурной зависимости элемента постоянной фазы оказалась применима для введения темпера-

турной зависимости в другие фрактальные модели ЭПФ и позволяет описывать температурные зависимости ЭПФ в ряде фрактальных теорий ЭПФ;

2. Уравнение Смолуховского и управляющее уравнение для стохастических систем в фрактальных пространствах, приведенные в работе, могут оказаться полезными для описания случайных систем с частичной памятью;
3. Найденное автоволновое решение для фрактальной среды с нелинейным коэффициентом диффузии предсказывает возможность волнового характера тока диффузии в фрактальных средах;
4. Решение уравнения Климонтовича в фрактальных средах может быть использовано для описания аномальной диффузии как в импульсном, так и в координатном пространствах;
5. Модель фрактальной размерности поверхности как параметра порядка может быть использована для описания широкого круга физических явлений в средах с фрактальными характеристиками;
6. Предложен метод описания кинетических явлений в средах с фрактальными структурами с помощью кинетических уравнений в обобщенных дробных производных. Последнее позволяет учитывать в больших системах с фрактальными структурами влияние фрактальных структур на поведение систем.
7. Предложен метод описания, с помощью уравнений кинетической теории открытых систем и введения функциональных пространств, сложных больших систем различной природы. Этот метод проиллюстрирован на примере экономических систем (с фрактальной и топологической размерностями).

Цитированная литература:

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения, Минск, Наука и техника, 1987, 688с.
2. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функций и их применение, т.1, Москва, Физматгиз, 1958, 440с.
3. Kobelev L.Ya. Generalized Riemann -Liouville Fractional Derivatives for Multifractal Sets (Preprint at http://arXiv:math.CA/0002008);

4. Кобелев Л.Я., Кобелев Я.Л., Кобелев В.Л., Кобелева О.Л. Температурная зависимость элемента постоянной фазы импеданса твердых электролитов в фрактальной теории. // Деп. в ВИНИТИ 6.03.1996, № 719-В-96. 19с.
5. Engstrom H., Bates J.B., Wang J.C. Non-Debye capacitance in single crystal β-alumina // Solid State Comm., 1980, V.35 № 7, P.543
6. Климонтович Ю.Л. Статистическая физика открытых систем. т.1(Москва, Янус 1995, 623с.), т.2 (Москва. Янус-К, 1999, 438с.)
7. Гинзбург В.Л., Ландау Л.Д.// ЖЭТФ,Т.20, С.1064
8. Иванова В.С., Баланкин А.С., Бунин И.Ж., Оксогоев А.А. Синергетика и фракталы в материаловедении, М.: Наука, 1994. 383 с.
9. Кобелев В.Л., Романов Е.П., Кобелев Л.Я., Кобелев Я.Л. О зависимости фрактальной размерности поверхности кристаллитов от давления. // Физика металлов. Металловедение 1988, Т.85, Вып.4 С.54-60.
10. Kobelev V.L., Kobelev L.Ya. On time dependence of fractal dimension of a growing ferroelectric surface.// 9th Int. Meet. on Ferroelectricity, 4-29 August, 1997, Seoul, Korea, Abstracts Book, p.10
11. Силин В.П. Введение в кинетическую теорию газов (Москва, Наука, 1971, 338с.)
12. Силин В.П., Рухадзе А.А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред (Москва, Атомиздат, 1961).
13. Быстрай Г.П., Аналитическая макроэкономика, Екатеринбург, Изд-во УрГУ, 1994
14. Puu T. Nonlinear Economic Dynamics, Berlin-Verlag, 1997;
15. Lorenz H.W. Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion, Springer-Verlag, 1993.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Кобелев Л.Я., Кобелев Я.Л., Кобелев В.Л., Кобелева О.Л. Температурная зависимость элемента постоянной фазы импеданса твердых электролитов в фрактальной теории. // Деп. в ВИНИТИ 6.03.1996, № 719-В-96. 19с.
2. Кобелев Л.Я., Кобелев Я.Л., Кобелев В.Л., Кобелева О.Л. Темпера-

турная зависимость элемента постоянной фазы импеданса твердых электролитов в фрактальной теории. // Электрохимия. 1999. Т.35. В.3. С. 294-302.

3. Кобелев Л.Я., Кобелева О.Л., Кобелев Я.Л., Кобелев В.Л. О диффузии через фрактальную поверхность // Доклады Академии наук, 1997, Т.355, №3, С.326-327.

4. Кобелев В. Л., Кобелева О. Л., Кобелев Я. Л., Кобелев Л.Я. О зависимости элемента постоянной фазы импеданса твердых электролитов от фрактальных характеристик поверхности электрод/образец // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 1998. №4, С.52-56.

5. Кобелев В.Л., Кобелева О.Л., Кобелев Я.Л., Кобелев Л.Я. Температурная зависимость элемента постоянной фазы в теории Ле Мео и Крепи // Первый всероссийский семинар "Нелинейные процессы и проблемы самоорганизации в современном материаловедении", Москва, 14-16 апреля 1997, тезисы докладов, стр. 84.

6. Кобелев Я.Л., Кобелева О.Л., Кобелев В.Л., Кобелев Л.Я. Температурная зависимость элемента постоянной фазы в теориях Лиу, Никоши-Пайкоши // Деп. в ВИНИТИ 11.10.96 № 2994-В96

7. В. Л. Кобелев, Л. Я. Кобелев, О .Л. Кобелева, Я. Л. Кобелев. Об одном методе введения температуры в фрактальные теории, описывающие физические явления // Всероссийская конференция "Проблемы фундаментальной физики", Саратов,7-12 октября 1996, тезисы, стр. 124.

8. Кобелев Я.Л., Романов Е.П. Влияние фрактальных характеристик поверхности твердых электролитов на температурную зависимость элемента постоянной фазы // Сб. трудов V Всероссийской конференции "Оксиды. Физико-химические свойства" Екатеринбург, январь 2000, С.256-527.

9. Кобелев Я.Л., Романов Е.П. Влияние фрактальных характеристик поверхности твердых электролитов на температурную зависимость элемента постоянной фазы //Доклады Академии наук. 2000, Т. 374, №2, С. 180-183.

10. Кобелев Я.Л., Кобелев Л.Я., Романов Е.П. Автоволновые процессы при нелинейной фрактальной диффузии // Доклады Академии наук, 1999, Т.369, №3, С.332-333.

11. Кобелев В.Л., Кобелев Л.Я., Кобелев Я.Л. Броуновское движение с памятью // Деп. в ВИНИТИ 15.12.95, №33-45-В-95;

12. L.Ya.Kobelev, V.L.Kobelev, Ya.L.Kobelev, O.L.Kobeleva; Brownian Systems with Fractional Dimensions (Thes. of Intern. Conf. CHAOS 98, Saratov, 6-10 October, 1998);

13. Kobelev V.L., Kobeleva O.L., Kobelev Ya.L., Kobelev L.Ya. Temperature dependence of constant phase element (CPE) in fractal theory // 11th International Conference on Solid State Ionics, Honolulu, USA, 16-21Nov, 1997, Extended Abstracts Book, p.223-224;

14. Кобелев Л.Я., Кобелев Я.Л., Кобелев В.Л., Романов Е.П. Фрактальная размерность поверхности как параметр порядка. // Деп. в ВИНИТИ 27.05.99, № 1668-В99

15. Кобелев Я.Л., Кобелев Л.Я., Романов Е.П. Фрактальная размерность поверхности как параметр порядка. // Доклады Академии наук, 2000. Т.370. №6. с.757-759.

16. Кобелев Я.Л., Кобелев Л.Я., Романов Е.П. Кинетические уравнения для больших систем с фрактальными структурами. // Доклады Академии наук, 2000.Т.372. №2. с.177-180.

17. Кобелев Л.Я., Кобелев В.Л., Кобелев Я.Л. О статистическом подходе к описанию экономических явлений.//Деп в ВИНИТИ 15.12.95 № 33-45-В95.

18. Кобелев В.Л., Кобелев Л.Я., Кобелев Я.Л., Кинетическое уравнение Климонтовича в фрактальном пространстве, Деп. в ВИНИТИ 01.04.98 № 967-В98; Тезисы конф. "Фазовые переходы и критические явления в конденсированных средах", Махачкала, 7-11 сентября, 1998г. 183-184

19. Kobelev L.Ya., Kobeleva O.L., Kobelev Ya.L. Is it Possible to Describe Economical Phenomena by Methods of Statistical Physics of Open Systems? // Preprint at http://arXiv:physics/0005010

20. Kobelev L.Ya., Kobeleva O.L., Kobelev Ya.L. About the Dependence of the Currency Exchange Rate at Time and National Dividend, Investments Size, Difference Between Total Demand and Supply. // preprint at http://arXiv:physics/0005011

21. Кобелев Л.Я., Романов Е.П., Кобелев Я.Л., Фрактальная размерность поверхности как параметр порядка, тезисы , Международная

конф. "Фазовые переходы и критические явления в конденсированных средах" Махачкала, сентябрь, 2000, с.137-138;

22. Кобелев Я.Л., Кобелев Л.Я., Романов Е.П., Нелинейная диффузия и автоволны в фрактальных средах, тезисы , Международная конф. "Фазовые переходы и критические явления в конденсированных средах" Махачкала, сентябрь, 2000, с.238-239;

23. Кобелев Л.Я., Кобелев Я.Л., Романов Е.П., Кинетические уравнения в системах с фрактальными структурами, тезисы , Международная конф. "Фазовые переходы и критические явления в конденсированных средах", Махачкала, сентябрь, 2000, с.181-182.

Подписано в печать 23.03.01. Формат 60× 84/16. Объем 1,5 п. л.
Тираж 120 экз. Заказ № 40.

Размножено с готового оригинал-макета
в типографии УрО РАН.

620219, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 18.